

高雷诺数下圆柱绕流数值模拟与分析

武 频,高 升

(上海大学 计算机工程与科学学院,上海 200444)

摘 要: 将大涡模拟(Large Eddy Simulation, LES)和多弛豫时间格子玻尔兹曼(Multiple Relaxation Time(MRT) LBM)方法相结合,用于解决 LBM 方法在高雷诺数流动模拟产生的数值不稳定的问题. 结合 D2Q9-MRT 模型与 Smagorinsky 涡粘模型,对高雷诺数下二维圆柱绕流进行数值模拟. 并根据实验结果,系统分析了圆柱绕流的脱落形态,以及 Strouhal 数和其阻力升力系数随雷诺数的变化情况. 实验结果表明该方法可以很好增加 LBM 在高雷诺数模拟中数值稳定性.

关键词: 格子 Boltzmann 方法;多弛豫时间;大涡模拟;高雷诺数

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2014)11-0139-04

Numerical Simulation and Analysis of Flow Around an Cylinder at High Reynolds Number

WU Pin, GAO Sheng

(School of Computer Engineering and Science, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: In this paper, large-eddy simulation combined with multi-relaxation time lattice Boltzmann (MRT-LBM) method is proposed for solving the poor stability problem in high Reynolds number flow simulation with LBM. The implementation is discussed in the context of 9-velocity (D2Q9) MRT-LBM model in conjunction with the Smagorinsky subgrid closure model. This model is used for doing the two-dimensional numerical simulation of flow around a cylinder with a high Reynolds number. According to the experimental results, a systematic analysis of the form of shed vortex of flow around cylinder is made, and the variation of the Strouhal number and the drag coefficient with the change of Reynolds number. The experimental results show that the method can well increase numerical stability in the simulation with LBM in a high Reynolds number.

Key words: lattice Boltzmann method; multi-relaxation time; large-eddy simulation; high Reynolds number

1 引言

格子 Boltzmann 方法(LBM)是一种新型的 CFD 数值模拟方法. 在直接数值模拟实验方面具有惊人的潜力^[1-2]. 尽管利用 LBM 方法可以对湍流进行直接模拟,但在当前的计算条件下,该方法还仅仅局限于一些较为简单的流动,当对大多数实际复杂问题的进行模拟时,还是需要借助一些湍流模型. 大涡模拟是一种介于直接数值模拟(DNS)和雷诺平均模拟(RANS)两者之间的湍流数值模拟方法,是

如今数值研究湍流模型流动的有效工具之一. 大涡模拟主要基于涡粘模型理论,采用了 Smagorinsky 模式. 该模型假定通过各向同性滤波器滤掉的小尺度脉动是局部平衡的,即以各向同性湍流为基础,假定涡粘性正比于亚格子尺度的特征长度和以滤波后变形张量场的一阶不变量为基础定义的特征湍流速度,以此求出亚格子应力^[3]. 本文将 D2Q9-MRT 模型与 Smagorinsky 涡粘模型相结合,使得格子 Boltzmann 方法对高雷诺数下流体也可以进行良好的模拟.

收稿日期: 2014-01-18; **修回日期:** 2014-03-03

基金项目: 国家自然科学基金项目(11002086);国家科技支撑计划(2009BAG12A01,2009BAG11B02)

2 D2Q9 多弛豫时间 LBM 模型

D2Q9-MRT 模型,仍在每个格子上将速度离散为 9 个方向的速度矢量.多弛豫时间 LBM 模型的演化方程为

$$f_a(x+c\Delta t, t+\Delta t) - f_a(x, t) = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}(\mathbf{R}_a(x, t) - \mathbf{R}_a^{\text{eq}}(x, t)) \quad (1)$$

式中, $\mathbf{M}$ 为 9×9 的转换矩阵,具体形式可参见文献[3], $\mathbf{R} = \{\rho, e, \epsilon, j_x, q_x, j_y, q_y, p_{xx}, p_{xy}\}^T$ 是分布函数的宏观矩矢量.列向量 $\mathbf{R}$ 中 ρ 为流体的密度; e 为能量; ϵ 与能量平方有关; j_x, j_y 为动量通量的 x 和 y 分量, q_x 和 q_y 对应于能量通量的两个分量, p_{xx}, p_{yy} 分别为应力张量的对角线和非对角线分量. $\mathbf{R}$ 与分布函数 f_a 的关系为

$$\mathbf{R} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{R} \quad (2)$$

$\mathbf{S}$ 为碰撞弛豫矩阵,是一个对角矩阵:

$$\mathbf{S} = \text{diag}(s_\rho, s_e, s_\epsilon, s_{j_x}, s_{q_x}, s_{j_y}, s_{q_y}, s_{p_{xx}}, s_{p_{xy}}).$$

由于 ρ, j_x 和 j_y 为守恒量,所以弛豫参数 s_ρ 和 s_{j_x} 对系统没有影响,因此可以取任意值,一般 $s_\rho = s_{j_x} = 0$.但若平衡分布中包含外力项,其效应受 s_{j_x} 影响.当模拟中存在固壁边界, s_{q_x} 将影响严格满足非滑移条件的边界位置.

MRTLBM 模型的演化过程与 LBGK 模型一样,分为两个步骤:碰撞步骤和对流步骤,其中碰撞过程在距空间内进行.在 LBGK 模型中,要求所有 f_i 都具有同样的松弛时间,而 MRTLBM 中则不同的矩矢量有不同的松弛时间,所以在碰撞过程所使用的平衡分布也各不相同, $\mathbf{R}^{\text{eq}}$ 定义如下:

$$\begin{cases} e^{\text{eq}} = -2\rho + 3(u^2 + v^2) \\ \epsilon^{\text{eq}} = \rho - 3(u^2 + v^2) \\ q_x^{\text{eq}} = -u \\ q_y^{\text{eq}} = -v \\ p_{xx}^{\text{eq}} = u^2 - v^2 \\ p_{xy}^{\text{eq}} = uv \end{cases} \quad (3)$$

为了保证线性稳定以及分离尺度,一般 $\mathbf{S}$ 中特征值都取值为 $0 \sim 2$ 之间.需要指出的是,当统一指定弛豫参数, $s_2 = s_3 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = \frac{1}{\tau}$, 则 MRT 模型退化为单弛豫时间 LBGK 模型.在本文计算中,松弛因子选择为: $s_e = 1.90$, $s_\epsilon = 1.63$, $s_{q_x} = 1.14$, $s_{p_{xy}} = 1/\tau$.

3 与 MRTLBM 相结合的大涡模拟

大涡模拟(LES)的主要是将涡旋分为大小两

种,通过建立数学滤波函数,从湍流中将尺度比滤波函数尺度小的涡过滤掉,从而对大空间尺度的涡旋进行求解,小涡旋则采用亚网格模型求解.建立合理的亚格子模型是大涡模拟的关键,目前模型的类型很多,本文采用其中的 Smagorinsky 涡粘模型.

简便起见,通常选用 D2Q9-MRT 模型,微观迁移速度取单位值,即 $c = \delta x / \delta t = 1$,格子格子声速 $c_s = 1/\sqrt{3}$.系统的粘性由碰撞弛豫矩阵 $\mathbf{S}$ 中 s_v 决定: $\nu = c_s^2 (\frac{1}{s_v} - 0.5) \Delta t$.

在 LES 模型中, $\nu = \nu_0 + \nu_t$, 其中,总的粘性系数 ν 由物理动力粘性 ν_0 和湍流粘性(涡粘性) ν_t 两个部分组成.在 Smagorinsky 模型中,涡粘性 ν_t 取决于应变率张量 $\mathbf{S}_{ij} = \frac{1}{2} [\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}]$, 滤波尺度 Δ 和 Smagorinsky 常数 C_s : $\nu_t = (C_s \Delta)^2 |\mathbf{S}|$, 式中 $|\mathbf{S}| = \sqrt{2\mathbf{S}_{ij}\mathbf{S}_{ij}}$, 本文选取 $C_s = 0.5$.

在传统方法中,应变率张量 $\mathbf{S}_{ij}$ 是通过有限差分法来计算的,而在 MRTLBM 模型中 $\mathbf{S}_{ij}$ 可以直接从非平衡分布函数来确定,如今有不少学者仍然采用 DdQm-LBGK 模型或者从 Boltzmann-BGK 方程导出的平衡态分布函数作为 f_i^{eq} , 再经变换得到 m^{eq} .实践证明,这种选取方法可以得到比较好的结果[4].本文亦采用该方法,这里非平衡态分布函数可由 $f_a^{\text{neq}} = [f_a - f_a^{\text{eq}}]$ 求得,虽然会增加部分计算量,但在全局来看这样依然节省了很多的计算时间.这也是该模型的优势之一.

4 力的计算

为了确定数值模拟结果的精确度,需要对流场的力进行计算.本文采用动量交换法计算流场的力[5],为了有效地使用动量交换法,引入以下两个标量数组, $m(i, j)$ 和 $m_b(i, j)$.如图 1 所示, ω 为固体边界, a 为流体节点, b 为固体内节点.当为流场中的节点(注意结点处于图中方格的四个角点上)时, $m(i, j)$ 设值为 0, 固体区域(非流场区域)节点设值为 1. $m_b(i, j)$ 在非流场区域边界上的节点(如点 b)时,设值为 1, 其余点设置为 0. 图中速度分量 e_a 和 e_a^- , 表示速度相反,即 $e_a^- = -e_a$. 经过一个时间步长,非流畅区域边界上的点与流场区域内所有邻居结点进行动量交换:

$$\sum_{a \neq 0} e_a [\widetilde{f}_a(b, t) + \widetilde{f}_a(b + e_a \delta_i, t)] [1 - m(b +$$

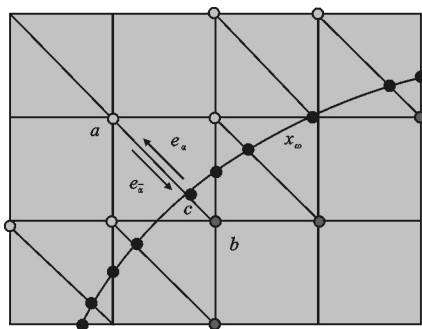


图1 边界节点示意图

$$e_a \delta_i] \quad (4)$$

将式(4)对所有非流场区域内边界节点 b 进行简单求和,即得到合力:

$$F = \sum_{all\ b} \sum_{a \neq 0} e_a [\widetilde{f}_a(b, t) + \widetilde{f}_a(b + e_a \delta_i, t)] [1 - m(b + e_a \delta_i)] \quad (5)$$

在动量交换法中, F 的计算是在算出碰撞项之后进行的. 力 F 在 x 方向的分量即为圆柱阻力 F_d , y 方向分量为圆柱升力 F_L .

5 二维圆柱绕流模拟

长久以来,圆柱绕流一直是各种理论分析、CFD 算法实验研究以及数值模拟对比验证的对象,是一个经典流体力学问题. 由于该模型具有不固定的分离点,并且具有分离后的尾流和离体漩涡. 而随着雷诺数不断变化时,尾流性质和离体涡的形态都会有很大的变化,流动现象及其明显. 所以本文选择圆柱绕流作为实验对象,主要目的如下:

- 当进行高雷诺数数值模拟时,验证文中模型保持数值模拟稳定性的能力;
- 同过对比阻力系数和 Strouhal 数的计算值和实验结果值,验证模型在高雷诺数下瞬态流动的计算精度

在对比模拟结果之前,需要介绍几个重要的描述绕流特征的无量纲数:以 F_d 表示圆柱所受到的沿来流方向的拖拽力, F_L 表示来流法向方向的升力,阻力 F_d 由摩擦阻力与压差阻力两部分组成. 拖拽力系数(即阻力系数)及升力系数按下式计算:

$$C_d = \frac{F_D}{0.5 \rho D U_0^2}, C_l = \frac{F_L}{0.5 \rho D U_0^2} \quad (6)$$

Strouhal 数: $St = f_s D / U_0$, 其中 f_s 为涡脱落的频率.

文中雷诺数定义为 $Re = \frac{U_0 D}{\nu}$, 其中 U_0 为来流速度, D 为圆柱直径, ν 为运动粘性系数. 实验考虑四

种情况,即雷诺数分别为 $Re = 20, 100, 10^4$ 和 1.4×10^5 . 前两种情况主要与其他文献对比了流场的形态变化,后两种情况则重点计算圆柱的阻力系数及 Strouhal 数,以验证模型的精确度.

圆柱绕流流场模型如图 2 所示,流体从左至右流动,左侧设定为速度入口,右侧设定为自由出流. 上下边界为无滑移固壁边界. 圆柱直径取 $D = 20$, 流场尺寸大小为 $40D \times 20D$, 圆柱中心在竖向置于流场中心 $10D$, 水平距离入口 $L_1 = 10D$, 距离下游出口 $L_2 = 30D$, 入口流速 $U_0 = 0.1$.

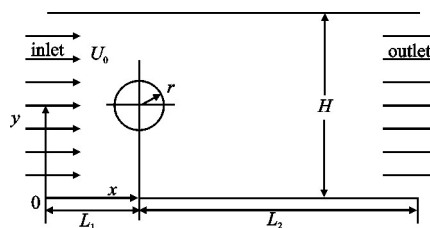
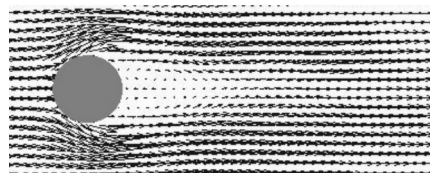
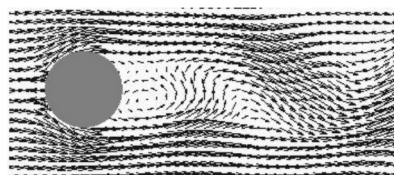


图2 圆柱绕流流场模型图

低雷诺数流动时,光滑圆柱体的周期性尾流仅仅为雷诺数的函数,几乎不会出现流动分离;当雷诺数逐渐增大,圆柱背面会形成一对稳定的漩涡;当雷诺数继续增大时,漩涡逐渐拉长并从圆柱背面候补交替释放出漩涡,组成卡门涡街. 圆柱绕流卡门涡街现象及不同雷诺数下圆柱绕流瞬时流线见图 3.

根据式(6)计算可以得到圆柱周围的均压力分布,如图 3 所示,由于流场初始条件不同以及网格是采用近似圆柱,某些格点与文献[6],[7]数据有稍许不同,但基本是吻合的. 从圆柱柱面均压力分布图(图 4)可以知道,漩涡的脱离点在 $\theta = 75^\circ$ 或者 $\theta = 285^\circ$ 附近,该结果与实验数值相符.

(a) $Re=20$ (b) $Re=100$

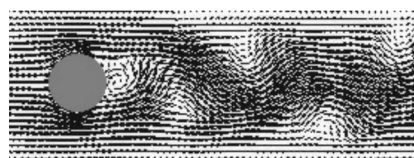
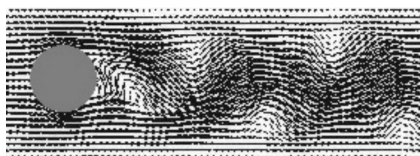
(c) $Re=10^4$ (d) $Re=1.4 \times 10^5$

图3 圆柱绕流流场瞬时流线图

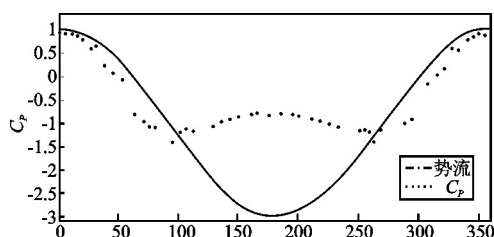
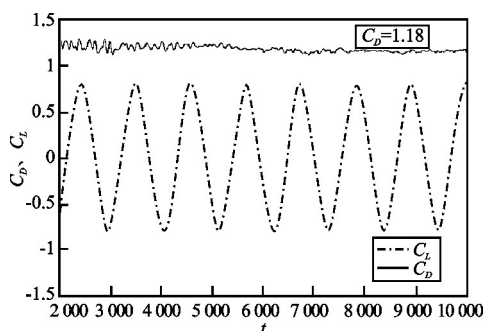


图4 柱面时均压力分布

图5显示了 $Re=1.4 \times 10^5$ 时的压力和升力系数。根据圆柱升力系数图,通过频谱分析,可以得到圆柱漩涡脱离频率,以此可求得 Strouhal 数 $St=0.214$,这与实际试验所得数值 0.2 相近。通过多篇文献对比,本文的数据结果是可以接受的。上面算例表明,结合大涡模拟的 MRT-LBM 方法在模拟复杂的高雷诺数圆柱绕流中具有较高的精度。另外根据式(6)求得的阻力系数平均值为 $C_D=1.18$,与文献[12]有所差异,但仍可接受,说明在该方法中对于力求解的精度还有待进一步提高。

图5 $Re=1.4 \times 10^5$ 时 C_D 、 C_L 变化曲线

6 结束语

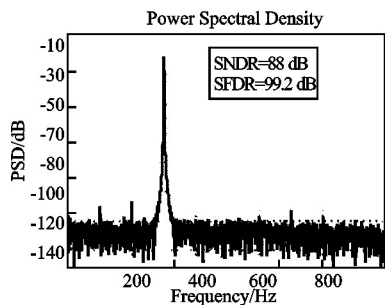
高雷诺数环境下格子 Boltzmann 方法的数值模

拟,无论在理论上还是在应用上都是十分重要的,与此同时它也是一项极其困难的研究课题。本文采用大涡模拟结合多弛豫时间格子玻尔兹曼方法,用来解决 LBM 方法在高雷诺数流动模拟时出现的不稳定问题,并分别在 $Re=20, 100, 10^4$ 和 1.4×10^5 时,对高雷诺数下圆柱绕流数值模拟进行实验验证。结果表明,该模型在模拟高雷诺数圆柱绕流时具有很好的数值稳定性,并得到合理的结果。但本文提出的模型仍有待改进之处。圆柱周围点的选取、直接适用于多弛豫时间格子玻尔兹曼方法的曲线固壁边界条件(无需在边界处进行矩空间与速度空间矩阵变换),尚待进行更深入的研究。

参考文献:

- [1] Qian YH, D DHumières, Lallemand P. Lattice BGK models for Navier-Stokes equation[J]. Europhysics Letters, 1992, 17(6):479 - 484.
- [2] Hou S. Lattice boltzmann method for incompressible viscous flow[D]. Kansas State University, 1995.
- [3] Lallemand P, Lro L-S. Theory of the lattice boltzmann method: dispersion, dissipation, isotropy, galilean invariance, and stability[J]. Physics Review E, 2000 (61):6456-6562.
- [4] Du R. Incompressible multi-relaxation-time lattice boltzmann model in 3-D space[J]. Journal of Hydrodynamics, 2010,22(6):782-787.
- [5] Verhaeghe F, Blanpain B, Wollants P. Lattice Boltzmann method for double-diffusive natural convection [J]. Physical Review E, 2007, 75(4): 046705.
- [6] Yao S G, Wang G L, Cheng Q F, et al. Lattice boltzmann method for numerical simulation of circular tube forced convection[J]. Advanced Materials Research, 2013(765): 460-464.
- [7] Spencer T J, Halliday I, Care C M. Lattice Boltzmann equation method for multiple immiscible continuum fluids[J]. Physical Review E, 2010, 82(6): 690-701.
- [8] 蒋荣勤. 高雷诺数下格子 Boltzmann 方法的应用研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学, 2008.
- [9] 郭照立,郑楚光. 格子 Boltzmann 方法的原理及应用[M]. 北京:科学出版社,2009:46-56.
- [10] Mei R, Yu D, Shyy W, et al. Force evaluation in the lattice Boltzmann method involving curved geometry [J]. Physical Review E, 2002, 65(4): 041203.
- [11] 林中虎,李永光,卢家才,等. 气液两相流漩涡脱落特性及工程应用[M]. 北京:化学工业出版社,2001.

(下转第 147 页)



(b) Sigma-Delta ADC 的输出频谱图

图 10 Sigma-Delta 调制器和 ADC 的仿真结果

6 结束语

采用 BCD 高低压兼容工艺,成功实现了一种可集成于高压电池组检测芯片的 16 bit Sigma-Delta A/D 转换器. 调制器通过采用单环三阶一位量化的 CIB 结构,采用开关电容积分器,有效降低了整体电路的功耗. 仿真结果表明,该 Sigma-Delta ADC 能够达到 88 dB 的信噪失真比和 99.2 dB 的动态范围,实际实现有效位数为 14.3 bit,消耗总电流仅为 0.935 mA,且可以达到 0.01% 的测量精度,适合集成于电池组检测芯片中.

参考文献:

- [1] Qaisar S. M, Dallet D. An evaluation methodology for the li-Ion battery multiplexed voltage measurement systems [C] // Instrumentation and Measurement Technology Conference (I2MTC). [s. l.]: IEEE, 2010: 785-788.
- [2] 李斌桥,陈莞,高静. 用于电池管理系统的 Sigma-Delta ADC 模型优化设计及研究[J]. 电路与系统学报, 2013,18(2):58-61.
- [3] Yang Yuqing, Amiya Chokhawala, Mark Alexander et al. A 114dB 68mW chopper-stabilized stereo multibit

- audio ADC in 5.62 μ m²[J]. IEEE Journal of Solid State Circuits, 2003, 38(12):2061-2068.
- [4] S M Lukic, J Cao, R C Bansal, et al. Energy storage systems for automotive applications[J]. Industrial Electronics. IEEE Transactions on, 2008 (55): 2258-2267.
- [5] M A Fetcenko, S R O vshinsky, B Reichman, et al. Recent advances in NiMH battery technology [J]. Journal of Power Sources, 2007(165):544-551.
- [6] B Srosati, J Garche. Lithium batteries; Status, prospects and future[J]. Journal of Power Sources, 2010 (195):2419-2430.
- [7] 刘燕娟,程东方. 用于电池电量测量的 Delta-Sigma 调制器设计[J]. 微电子学与计算机, 2013,30(7):82-85.
- [8] R del Rio, F Medeiro, B Perez-Verdu, et al. Rodriguez-vazquez CMOS cascade sigma-delta modulators for sensors and telecom [M]. Netherland: Springer Inc, 2006.
- [9] Richard Schreier, Gabor C Temes. Understanding delta-sigma data converters [M]. New Jersey: Wiley & Sons Inc, 2004.
- [10] Shahriar Rabii, Bruce A Wooley. A 1.8-V digital-audio sigma-delta modulator in 0.8- μ m CMOS[J]. IEEE Journal of Solid-State Circuit, 1997,32(6):783-796.
- [11] 陈建球,任俊彦,许俊,等. 一个用于 GSM 的 80dB 动态范围 Σ - Δ 调制器[J]. 半导体学报, 2007, 28(2): 294-301.
- [12] 范军,蒋见花,李海龙. 一种适用于信号检测的低失真低功耗 Σ - Δ A/D 转换器[J]. 微电子学, 2011, 41(4): 488-492.

作者简介:

袁云女,(1988-),硕士研究生. 研究方向为高精度 ADC 设计.

(上接第 142 页)

- [12] Braza M, Perrin R, Hoarau Y. Turbulence properties in the cylinder wake at high Reynolds numbers[J]. Journal of fluids and Structures, 2006, 22(6): 757-771.

作者简介:

武频女,(1975-),博士,副教授. 研究方向为 CFD 数值计算、高性能计算、并行计算.

高升男,(1989-),硕士研究生. 研究方向为高性能计算、CFD 数值计算.